CHAPITRE EM3

Équations de Maxwell

Jusqu'à présent, nous avons surtout eu une approche globale des phénomènes. Dans ce chapitre, nous introduisons dans un premier temps de nouveaux outils mathématiques qui permettent d'avoir une approche locale, ce qui nous permettra d'exploiter les équations de Maxwell qui contiennent à elles quatre toute l'électromagnétisme !
Enfin, l'approche locale nous permettra de faire un lien entre les distributions de charge et de courant étudiées dans les chapitres précédents.

Contrairement aux deux chapitres précédents, les champs peuvent dépendre du temps.

I - Analyse vectorielle - quelques bases

Soit $\overrightarrow{A}$ un champ vectoriel.

Les expressions des opérateurs différentiels présentés sont à connaître en coordonnées cartésiennes, mais seront toujours redonnées en coordonnées cylindriques ou sphériques.

I.A - Rotationnel

Définition (Rotationnel)

L'opérateur rotationnel est un opérateur différentiel, qui à un champ vectoriel $\overrightarrow{A}$ fait correspondre un champ vectoriel noté $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{A})$ ou $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{A}$.

Expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes

Remarque - Retrouver l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes

Comment peut-on interpréter le rotationnel ?

Propriété du rotationnel

Démonstration

Corollaire

Théorème de Stokes ⋆⋆

Soit Γ un contour **FERMÉ** orienté et $\mathcal{S}$ une surface qui s'appuie sur le contour Γ et orienté avec le sens de Γ et la règle de la main droite.
Soit $\overrightarrow{A}$ un champ vectoriel. On a :

I.B - Divergence

Définition (Divergence)

L'opérateur divergence est un opérateur différentiel, qui à un champ vectoriel $\overrightarrow{A}$ fait correspondre un champ scalaire noté $\overrightarrow{\mathrm{div}}(\overrightarrow{A})$ ou $\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{A}$.

Expression de la divergence en coordonnées cartésiennes

Remarque - Retrouver l'expression de la divergence en coordonnées cartésiennes

Comment peut-on interpréter la divergence ?

Propriété de la divergence

Démonstration

Corollaire

Théorème de Green-Ostrogradski ⋆⋆

Soit Σ une surface **FERMÉE** délimitant le volume $\mathcal{V}$ orientée vers l'extérieur.
Soit $\overrightarrow{A}$ un champ vectoriel. On a :

Application
Calculer la divergence et le rotationnel du champ $\overrightarrow{A} = (2xy + z^3)\overrightarrow{u_x} + x^2\overrightarrow{u_y} + 3xz^2\overrightarrow{u_z}$

II - Équations de Maxwell

II.A - Énoncé sous forme locale

Equations de Maxwell ⋆⋆⋆

II.B - Énoncés sous forme intégrale

Maxwell-Gauss global ⇒ théorème de Gauss

Soit Σ une surface fermée et orientée vers l'extérieur. Le flux de $\overrightarrow{E}$ est lié à la charge Q_Σ incluse dans le volume défini par Σ :

$$\oiint_\Sigma \overrightarrow{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_\Sigma}{\varepsilon_0}$$

Démonstration

Remarque
On remarque que le théorème de Gauss reste vrai dans des situations dépendant du temps.

Maxwell-Faraday global ⇒ loi de Faraday

Soit un circuit orienté. Le circuit est le siège d'une fém induite e_{ind} ORIENTÉE dans le même sens que i et liée au flux magnétique à travers la surface définie par le circuit :

Démonstration

Remarque
On retrouve qu'en régime stationnaire, $\overrightarrow{E}$ est à circulation conservative.

Maxwell-Flux global $\Rightarrow$ conservation du flux de $\overrightarrow{B}$

$\overrightarrow{B}$ est à flux conservatif :

$$\forall \Sigma, \qquad \oiint_{\Sigma} \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dS} = 0$$

Démonstration

Remarque

On remarque que le champ $\overrightarrow{B}$ reste à flux conservatif dans des situations dépendant du temps.

Maxwell-Ampère $\Rightarrow$ théorème d'Ampère généralisé

Soit un contour Γ FERMÉ orienté et $\mathcal{S}$ une surface reposant sur Γ et orienté avec le sens de Γ et la règle de la main droite.
Alors,

$$\oint_{\Gamma} \overrightarrow{B}.\overrightarrow{dl} = \mu_0 I_{enlacé} + \mu_0 I_{déplacement\, enlacé}$$

avec $I_{déplacement\, enlacé} = \iint_{\mathcal{S}} \varepsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}.\overrightarrow{dS}$

Démonstration

Remarque

On retrouve le théorème d'Ampère en régime stationnaire, et on constate qu'il faut a priori utiliser sa forme généralisée dans les situations qui dépendent du temps.

ARQS magnétique

III - Conservation de la charge

Postulat de base (rappel)

III.A - Équation locale de conservation de la charge

Équation locale de conservation de la charge

Démonstration 1D

Démonstration 3D (hors programme)

III.B - Démonstration via les équations de Maxwell

Démonstration

III.C - Conséquence dans l'ARQS magnétique

Loi des nœuds

Démonstration

IV - Retour sur le régime stationnaire

IV.A - Équations de Maxwell en régime stationnaire

Équations de Maxwell en régime stationnaire

Remarque

- ▷ On voit qu'en régime stationnaire, $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont découplés.
- ▷ On a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$, on a donc bien qu'en régime stationnaire, il existe un champ scalaire V tel que $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V$

IV.B - Équations de Poisson et de Laplace

Définition (Laplacien scalaire)

Expression du laplacien scalaire en coordonnées cartésiennes

Équations de Poisson et Laplace

Démonstration